



Лаврикова Л.Е., Шмидт Т.П.

**Методические рекомендации по выполнению
практических занятий
по теме: «Корни, степени, логарифмы»**



Лаврикова Л.Е., Шмидт Т.П. Методические рекомендации по выполнению практических занятий по теме: «Корни, степени, логарифмы» - Омск: БПОУ ОО «ОКОТСиТ», 2020. – 39 с.

Методические указания для выполнения практических занятий являются частью программы подготовки специалистов среднего звена БПОУ ОО «ОКОТСиТ» для всех специальностей в соответствии с требованиями ФГОС СПО.

Методические указания по выполнению практических занятий адресованы обучающимся очной и заочной форм обучения. Методические указания включают в себя общие требования к выполнению практических занятий и оформлению отчета о выполненной работе, критерии оценивания работ.

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Введение	4
Общие требования для обучающихся по выполнению практических занятий и оформлению отчета, критерии оценивания работ	5
Тема: Корни, степени, логарифмы.	7
1 Практическое занятие: Вычисление и сравнение корней.	7
2 Практическое занятие: Выполнение расчетов с радикалами.	10
3 Практическое занятие: Решение иррациональных уравнений.	12
4 Практическое занятие: Нахождение значений степеней с рациональными показателями. <i>(Нахождение значений степеней с рациональными показателями. Сравнение степеней.)</i>	13
5 Практическое занятие: Преобразования выражений, содержащих степени.	16
6 Практическое занятие: Решение показательных уравнений. (2 часа)	19
7 Практическое занятие: Решение прикладных задач.	21
8 Практическое занятие: Нахождение значений логарифма по произвольному основанию.	23
9 Практическое занятие: Переход от одного основания к другому.	26
10 Практическое занятие: Вычисление и сравнение логарифмов.	27
11 Практическое занятие: Логарифмирование и потенцирование выражений. (2 часа)	30
12 Практическое занятие: Решение логарифмических уравнений (3 часа)	32
13 Практическое занятие: Приближенные вычисления и решения прикладных задач.	37
Список используемой литературы	39

Введение

Методические рекомендации по организации и выполнению практических занятий разработаны согласно рабочей программы Математика.

Практические занятия направлены на достижение следующих целей:

- обеспечение сформированности представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики;
- обеспечение сформированности логического, алгоритмического и математического мышления;
- обеспечение сформированности умений применять полученные знания при решении различных задач;
- обеспечение сформированности представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

Перечень практических работ приведён в таблице.

Таблица

№ п/п	Название работы
1	Практическое занятие: Вычисление и сравнение корней.
2	Практическое занятие: Выполнение расчетов с радикалами.
3	Практическое занятие: Решение иррациональных уравнений.
4	Практическое занятие: Нахождение значений степеней с рациональными показателями. (Нахождение значений степеней с рациональными показателями. Сравнение степеней.)
5	Практическое занятие: Преобразования выражений, содержащих степени.
6	Практическое занятие: Решение показательных уравнений.
7	Практическое занятие: Решение прикладных задач.
8	Практическое занятие: Нахождение значений логарифма по произвольному основанию.
9	Практическое занятие: Переход от одного основания к другому.
10	Практическое занятие: Вычисление и сравнение логарифмов.
11	Практическое занятие: Логарифмирование и потенцирование выражений.
12	Практическое занятие: Решение логарифмических уравнений.
13	Практическое занятие: Приближенные вычисления и решения прикладных задач.

Общие требования для обучающихся по выполнению практических занятий и оформлению отчета, критерии оценивания работ

1. Перед выполнением практического занятия необходимо повторить теоретический материал, используя рекомендованную литературу, конспект лекций и теоретическую часть работы.
2. Обучающиеся обязаны иметь при себе линейку, карандаш, калькулятор, тетрадь для выполнения практических занятий.
3. Отчеты по практическим занятиям оформляются аккуратно и должны включать в себя следующие пункты:
 - тему и цель практического занятия;
 - решение предложенных задач или примеров.

Критерии оценивания работ

Отметку за работу на практическом занятии, студент получает в случае выполнения им практического задания у доски, или самостоятельного выполнения его в тетради для практических и теоретических занятий.

В случаях отсутствия обучающихся на практических занятиях, практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием настоящих методических рекомендаций. В этом случае отметку по каждому пропущенному практическому занятию студент получает после её выполнения и предоставления отчета в письменном виде, а также ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного занятия

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена более чем на 90%;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки),
- допущены одна существенная ошибка или две-три несущественных ошибки или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки),
- работа выполнена полностью более чем на 70%.

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме;
- при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере,
- правильно выполнено меньше половины работы,
- работа показала полное отсутствие у обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.
- не приступил к выполнению работы.

К категории существенных ошибок следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием студентами основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой.

К категории несущественных ошибок следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения. При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

Самостоятельные работы предусмотренные во время практических занятий дают возможность проверить наработанные умения обучающихся. Данные работы оцениваются отдельно по пятибалльной шкале.

Критерии оценивания самостоятельных работ, контрольных тестов, математических диктантов	Оценка
Выполнено 90-100 % заданий	«5»
Выполнено 71-89 % заданий	«4»
Выполнено 50-70 % заданий	«3»
Выполнено менее 50 % заданий	«2»

Практическое занятие по теме:
Вычисление и сравнение корней.

Цель: Закрепление теоретических знаний при выполнении заданий на вычисление и сравнение корней.

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, калькуляторы.

Время выполнения: 1 час.

Содержание:

Задание 1:

Вычислите (3.54—3.59):

3.54 а) $\sqrt[3]{(-8)^2}$; б) $\sqrt[4]{10\,000}$; в) $\sqrt[5]{2 \cdot 16}$; г) $\sqrt[6]{9 \cdot 81}$.

3.55 а) $\sqrt[3]{1000} - \sqrt[4]{160\,000}$; б) $\sqrt[5]{3\,200\,000} + \sqrt[3]{8000}$;
в) $\sqrt[3]{0,008} + \sqrt[4]{0,0625}$; г) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}} - \sqrt[3]{\frac{1}{125}}$.

3.56 а) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[3]{125 \cdot 27}$; в) $\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{625}$;
г) $\sqrt[4]{81 \cdot 16}$; д) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; е) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$;
ж) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{125}$; з) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{24}$; и) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{100}$.

3.57 а) $\sqrt[3]{2} (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{500})$; б) $\sqrt[4]{5} (\sqrt[4]{2000} - \sqrt[4]{125})$;
в) $\sqrt[3]{0,81} \cdot \sqrt[3]{0,9}$; г) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{1250}$.

3.58. а) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$;
в) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{-2}$; г) $\sqrt[5]{-7} \cdot \sqrt[5]{49} \cdot \sqrt[5]{49}$.

3.59 а) $(\sqrt[3]{-2})^3 + (\sqrt[5]{8})^5$; б) $\sqrt[5]{-1} - \sqrt[3]{-8}$.

Задание 2: Вычислите и сравните:

- 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $(\sqrt{8})^{-10}$; 2) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$ и $\sqrt[13]{5}$; 3) $3 \cdot \sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{81}$; 4) $\sqrt[12]{623}$ и $\sqrt[3]{5}$;
5) $\frac{1}{2}\sqrt{40}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{99}$; 6) $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ и 7; 7) $(1,2 + \sqrt{5})^{100}$ и 3^{100} ;
8) $\sqrt{12} - \sqrt{11}$ и $\sqrt{11} - \sqrt{10}$; 9) $\sqrt[30]{1} + \sqrt[4]{2}$ и 2; 10) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{32}}$ и $\sqrt[7]{\sqrt[5]{3\sqrt{28}}}$;

Теоретический материал:

Опр. Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -ая степень которого равна a .

Примеры

1. $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4 > 0$ и $4^3 = 64$ 2. $\sqrt[3]{125} = 5$, так как $5 > 0$ и $5^3 = 125$

Из определения арифметического корня следует, что если $a \geq 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$ и $\sqrt[n]{a^n} = a$

Свойства арифметического корня:

Арифметический корень n -ой степени обладает следующими свойствами: если $a \geq 0$, $b \geq 0$ и n, m - натуральные числа, причём $n \geq 2$, $m \geq 2$, то

$$1^{\circ}. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

$$2^{\circ}. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0).$$

$$3^{\circ}. \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad (k > 0).$$

$$4^{\circ}. \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \quad (k > 0).$$

$$5^{\circ}. \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k \quad (\text{если } k \leq 0, \text{ то } a \neq 0).$$

Корень нечётной степени из отрицательного числа a вычисляется следующим образом:

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$$

$$\text{Например, } \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$$

Примеры применения свойств арифметического корня.

$$1. \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$2. \sqrt[3]{\frac{256}{625}} : \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{256}{625} : \frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$$

$$3. \sqrt[7]{5^{21}} = \sqrt[7]{(5^3)^7} = 5^3 = 125$$

$$4. \sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$$

$$5. (\sqrt[4]{9})^{-2} = \sqrt[4]{9^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$$

Пример 14. Сравнить числа $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ и $\sqrt{15} - \sqrt{12}$.

Решение. Так как оба числа положительны, то можем сравнить их натуральные степени (квадраты). При этом знак сравнения не меняется.

$$\begin{aligned} \sqrt{7} - \sqrt{5} &< \sqrt{15} - \sqrt{12} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 &< (\sqrt{15} - \sqrt{12})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12 - 2\sqrt{35} &< 27 - 2\sqrt{180} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

(уменьшаем теперь каждое число на 12)

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{35} < 15 - 2\sqrt{180} \Leftrightarrow$$

(прибавляем к каждому из полученных чисел сумму $2\sqrt{35} + 2\sqrt{180}$)

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{180} < 15 + 2\sqrt{35} \Leftrightarrow$$

(так как оба числа положительны, то сравниваем их квадраты)

$$\Leftrightarrow 720 < 365 + 60\sqrt{35} \Leftrightarrow$$

(поделим оба числа на 5)

$$\Leftrightarrow 144 < 73 + 12\sqrt{35} \Leftrightarrow 71 < 12\sqrt{35} \Leftrightarrow$$

(еще раз возведем, полученные числа в квадрат)

$$\Leftrightarrow 71^2 < (12\sqrt{35})^2 \Leftrightarrow 5041 < 5040.$$

В итоге, выполнив ряд преобразований, мы получили, что знак неравенства между исходными числами тот же, что и между исходными числами тот же, что и

Иногда удобно умножать сравниваемые выражения на одно и то же выражение, например, для выделения разности квадратов. Для неотрицательных чисел a и b справедлива формула

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

Выражения $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ называются *сопряженными*.

Пример 15. Сравнить числа $\sqrt{8} - \sqrt{6}$ и $\sqrt{13} - \sqrt{11}$.

Решение. Домножив и поделив каждое выражение на сопряженное к нему, получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{8} - \sqrt{6} &\vee \sqrt{13} - \sqrt{11} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{8} - \sqrt{6})(\sqrt{8} + \sqrt{6})}{\sqrt{8} + \sqrt{6}} \vee \\ &\vee \frac{(\sqrt{13} - \sqrt{11})(\sqrt{13} + \sqrt{11})}{\sqrt{13} + \sqrt{11}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{8} + \sqrt{6}} \vee \frac{2}{\sqrt{13} + \sqrt{11}}. \end{aligned}$$

Знаменатель второй дроби больше, поэтому вторая дробь меньше. Соответственно получаем, что $\sqrt{8} - \sqrt{6} > \sqrt{13} - \sqrt{11}$.

Ответ: $\sqrt{8} - \sqrt{6} > \sqrt{13} - \sqrt{11}$.

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.

В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Практическое занятие по теме:

Выполнение расчетов с радикалами.

Цель: Закрепление теоретических знаний при выполнении заданий на выполнение расчетов с радикалами.

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, калькуляторы.

Время выполнения: 1 час.

Содержание:

3.60 Вынесите множитель из-под знака корня:

- а) $\sqrt[3]{40}$; б) $\sqrt[5]{-64}$; в) $\sqrt[5]{-96}$; г) $\sqrt[3]{54}$;
д) $\sqrt[3]{\frac{8}{8}}$; е) $\sqrt[3]{\frac{27}{4}}$; ж) $\sqrt[3]{-\frac{250}{16}}$; з) $\sqrt[3]{-\frac{64}{7}}$;
и) $\sqrt[4]{32}$; к) $\sqrt[4]{243}$; л) $\sqrt[4]{1296}$; м) $\sqrt[4]{50\,625}$.

3.61 Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

- а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[3]{-4}}$; г) $\frac{5}{\sqrt[5]{-9}}$.

3.62 Вычислите:

- а) $\sqrt{(-2)^2}$; б) $\sqrt{(-5)^4}$; в) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$;
г) $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$; д) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$; е) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}$.

3.63 Упростите выражение:

- а) $\sqrt[3]{32}$; б) $\sqrt[5]{800}$; в) $30\sqrt[3]{\frac{1}{12}} + \frac{7}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + 5\sqrt[3]{144}$;
г) $\sqrt[4]{80}$; д) $\sqrt[4]{405}$; е) $\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{32} - 2\sqrt[3]{40}$;
ж) $\sqrt[4]{81 \cdot (4 - \sqrt{17})^4}$; з) $\sqrt[3]{0,001} - \sqrt[6]{0,000064}$.

3.64 Для каких чисел k справедливо равенство:

- а) $\sqrt{(k-1)^2} = 1 - k$; б) $\sqrt{(1+k)^2} = -1 - k$?

Теоретический материал:

Опр. Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -ая степень которого равна a .

Примеры

1. $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4 > 0$ и $4^3 = 64$ 2. $\sqrt[3]{125} = 5$, так как $5 > 0$ и $5^3 = 125$

Из определения арифметического корня следует, что если $a \geq 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$ и $\sqrt[n]{a^n} = a$

Свойства арифметического корня:

Арифметический корень n -ой степени обладает следующими свойствами: если $a \geq 0$, $b \geq 0$ и n, m - натуральные числа, причём $n \geq 2$, $m \geq 2$, то

1°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

2°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ($b \neq 0$).

3°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ ($k > 0$).

4°. $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[nk]{a}$ ($k > 0$).

5°. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ (если $k \leq 0$, то $a \neq 0$).

Корень нечётной степени из отрицательного числа a вычисляется следующим образом:

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|} \quad \text{Например, } \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$$

Примеры применения свойств арифметического корня.

$$1. \quad \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$2. \quad \sqrt[3]{\frac{256}{625}} : \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{256}{625} : \frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$$

$$3. \quad \sqrt[7]{5^{21}} = \sqrt[7]{(5^3)^7} = 5^3 = 125. \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2. \quad (\sqrt[4]{9})^{-2} = \sqrt[4]{9^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$$

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.

В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Практическое занятие по теме:
Решение иррациональных уравнений.

Цель: Закрепление теоретических знаний при решении иррациональных уравнений.

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, калькуляторы.

Время выполнения: 1 час.

Содержание:

Решите уравнения:

33.14. а) $\sqrt[3]{x-5} = -3$;

в) $\sqrt[5]{2x+8} = -1$;

б) $\sqrt[4]{4-5x} = -2$;

г) $\sqrt[3]{7-4x} = 4$.

О33.15. а) $\sqrt[3]{x^2-9x-19} = -3$;

в) $\sqrt[7]{2x^2+6x-57} = -1$;

б) $\sqrt[4]{x^2-10x+25} = 2$;

г) $\sqrt[6]{x^2+7x+13} = 1$.

О35.25. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5x} + 13 + \frac{\sqrt[3]{5x}}{5} = 2\sqrt[3]{5x}$;

б) $\sqrt[4]{2x} + \sqrt[4]{32x} + \sqrt[4]{162x} = 6$.

Теоретический материал:

Опр. Уравнения, в которых переменная находится под знаком корня, называются иррациональными.

Для решения иррационального уравнения надо левую и правую части уравнения возвести в n -ую степень, равную показателю корня

Пример

1. Решение уравнения $\sqrt{1+3x} = 1-x$ методом возведения в квадрат обеих частей уравнения.

$$(\sqrt{1+3x})^2 = (1-x)^2;$$

$$1+3x = x^2 - 2x + 1;$$

$$x^2 - 5x = 0.$$

Решив это уравнение, находим корни $x_1 = 0, x_2 = 5$.

Проверка: если $x = 0$, то $\sqrt{1+3 \cdot 0} = 1-0$, $1 = 1$ – верно;

если $x = 5$, то $\sqrt{1+3 \cdot 5} = 1-5$, $4 = 4$ – неверно.

Ответ: $x = 0$.

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.

В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Практическое занятие по теме:

Нахождение значений степеней с рациональными показателями.

(Нахождение значений степеней с рациональными показателями. Сравнение степеней.)

Цель: Закрепление теоретических знаний при нахождении значений степеней с рациональными показателями, сравнении степеней с рациональными показателями..

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, калькуляторы.

Время выполнения: 1 час.

Содержание:

ВЫПОЛНИТЕ СЛЕДУЮЩИЕ ЗАДАНИЯ:

Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

37.1. а) $c^{\frac{3}{4}}$; б) $p^{5\frac{1}{2}}$; в) $x^{\frac{3}{4}}$; г) $y^{2\frac{2}{3}}$.

37.2. а) $0,2^{0,5}$; б) $t^{0,8}$; в) $b^{1,5}$; г) $8,5^{0,6}$.

37.11. Представьте заданное выражение в виде степени с рациональным показателем:

а) $\sqrt{b^{-1}}$; б) $\sqrt[12]{b^{-5}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^{-3}}}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}}$.

37.12. Вычислите:

а) $4^{-\frac{1}{2}}$; б) $8^{-\frac{1}{3}}$; в) $32^{-\frac{1}{5}}$; г) $16^{-\frac{1}{4}}$.

37.13. Имеет ли смысл выражение:

а) $5^{-\frac{4}{3}}$; б) $(-16)^{\frac{2}{3}}$; в) $23^{-\frac{3}{2}}$; г) $(-25)^{\frac{1}{2}}$?

37.14. Сравните:

а) $2^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{2}}$; б) $0,3^{\frac{1}{2}}$ и $0,5^{\frac{1}{2}}$; в) $5^{\frac{1}{2}}$ и $5^{\frac{1}{3}}$; г) $7^{\frac{1}{3}}$ и $7^{\frac{2}{6}}$.

Упростите выражение:

37.15. а) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$; б) $b^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$; в) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}}$; г) $d^5 \cdot d^{\frac{1}{2}}$.

37.16. а) $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{3}{2}}$; б) $y^{-\frac{5}{6}} : y^{\frac{1}{3}}$; в) $z^{\frac{1}{5}} : z^{-\frac{1}{2}}$; г) $m^{\frac{1}{3}} : m^2$.

37.17. а) $(b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$; б) $(c^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$; в) $(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}}$; г) $(p^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{9}}$.

37.18. а) $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x}$; б) $y^{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{y^2}$; в) $z^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{z}$; г) $\sqrt[4]{c^3} \cdot c^{\frac{1}{4}}$.

Найдите значение выражения:

○37.20. а) $10^{\frac{2}{5}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{0,1}$; б) $49^{-\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{12}} \cdot 7^{-\frac{3}{4}}$;

б) $2^{1,3} \cdot 2^{-0,7} \cdot 4^{0,7}$; г) $25^{0,3} \cdot 5^{1,4} \cdot 625^{0,25}$.

○37.21. а) $4^{0,6} \cdot 2^{0,2} : 2^{-0,8}$; б) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} : 4^{\frac{1}{3}}$;

б) $3 \cdot 9^{0,4} : \sqrt[5]{3^{-1}}$; г) $8^{-\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{2}$.

Теоретический материал:

Опр. Если n – натуральное число, m – целое число и частное $-\frac{m}{n}$ является целым

числом, то при $a > 0$ справедливо равенство $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Пример

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8$$

Опр.

Для любых рациональных чисел p и q и $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

2. $a^p : a^q = a^{p-q}$

3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

6. Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$

7. Возведение в отрицательную степень

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$$

1.4. Сравнение выражений, содержащих степени

При сравнении двух степеней с одинаковыми показателями или одинаковыми основаниями, используют следующие правила.

- Если натуральное число n нечетно и $a > b$, то $a^n > b^n$.
- Если натуральное число n четно и $a > b$, то:
 - а) для положительных a и b имеем $a^n > b^n$;
 - б) для отрицательных a и b имеем $a^n < b^n$.
- Если $a > 1$ и $m > n$, то $a^m > a^n$.
- Если $0 < a < 1$ и $m > n$, то $a^m < a^n$.

При сравнении двух степеней с разными показателями и основаниями обычно в них выделяют одинаковое основание или одинаковый показатель.

Пример 11. Сравнить числа:

а) 5^{60} и 8^{20} ; б) 2^{30} и 4^{14} ; в) $2,5^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ и $0,4^{-0,5}$; г) 7^{30} и 4^{40} ; д) 3^{21} и 2^{31} .

Решение. а) Так как $8^{20} = 2^{60}$ и $5 > 2$, то $5^{60} > 2^{60}$ и $5^{60} > 8^{20}$.

б) Так как $4^{14} = 2^{28}$ и $30 > 28$, то $2^{30} > 2^{28}$ и $2^{30} > 4^{14}$.

в) Заметим, что $2,5^{\frac{\sqrt{5}}{6}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$, а $0,4^{-0,5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-0,5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{0,5}$.

г) 1-й способ. Заметим, что $7^{30} = (7^3)^{10} = 343^{10}$ и $4^{40} = (4^4)^{10} = 256^{10}$. Так как $343 > 256$, то из свойств степеней следует $343^{10} > 256^{10}$ или $7^{30} > 4^{40}$.

д) Имеем

$3^{21} = 3^{20} \cdot 3 = 9^{10} \cdot 3$ и $2^{31} = 2^{30} \cdot 2 = 8^{10} \cdot 2$. Так как $9^{10} > 8^{10}$ и $3 > 2$, то $9^{10} \cdot 3 > 8^{10} \cdot 2$ и $3^{21} > 2^{31}$.

Пример 12. Сравнить числа 13^5 и 23^4. Решение. Воспользуемся формулой $(a+1)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1.$	Тогда $13^5 = (12+1)^5 > 12^5 + 5 \cdot 12^4 = 12^4(12+5) =$ $= 17 \cdot 12^4 > 16 \cdot 12^4 = 2^4 \cdot 12^4 = 24^4 > 23^4.$ Ответ: $13^5 > 23^4$.
---	---

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.

В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Практическое занятие по теме:

Преобразования выражений, содержащих степени.

Цель: Закрепление теоретических знаний при преобразовании выражений содержащих степени.

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, калькуляторы.

Время выполнения: 1 час.

Содержание:

Сократите дробь:

37.28. а) $\frac{4 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} - 3}$; б) $\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a - b}$; в) $\frac{x + x^{\frac{1}{2}}}{2x}$; г) $\frac{p^{\frac{1}{2}} - 5}{p - 25}$;

○37.29. а) $\frac{c + c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}} + d}{c^{\frac{3}{2}} - d^{\frac{3}{2}}}$; б) $\frac{m + n}{m^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}$.

Упростите выражение:

○37.30. а) $(1 + c^{\frac{1}{2}})^2 - 2c^{\frac{1}{2}}$; в) $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})^2 + 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;
б) $(m^{\frac{1}{4}} - m^{\frac{1}{3}})^2 + 2m^{\frac{7}{12}}$; г) $\sqrt{b} + \sqrt{c} - (b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}})^2$.

○37.31. а) $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})^2 - (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})^2$;
б) $(a^{\frac{3}{2}} + 5a^{\frac{1}{2}})^2 - 10a^2$.

○37.32. а) $(x^{\frac{1}{4}} + 1)(x^{\frac{1}{4}} - 1)(x^{\frac{1}{2}} + 1)$;
б) $(k^{\frac{1}{4}} + l^{\frac{1}{4}})(k^{\frac{1}{8}} + l^{\frac{1}{8}})(k^{\frac{1}{8}} - l^{\frac{1}{8}})$.

○37.33. а) $\frac{a - b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a - b}$; б) $\frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sqrt{y}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}$.

Самостоятельная работа:

1 вариант

1. Вычислить: а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$

2. Представить в виде степени с рациональным показателем: а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; б) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$;

3. Вычислить: $3^{1+2\sqrt{2}} : 9^{3\sqrt{2}}$

4. Сравнить числа: а) $2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,7}$;

5. Упростить выражение:
$$\frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$$

2 вариант

1. Вычислить: а) $81^{\frac{3}{4}}$; б) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$;

2. Представить в виде степени с рациональным показателем: а) $b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{b}$; б) $b^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{b}$

3. Вычислить: $5^{1+2\sqrt{2}} : 25^{3\sqrt{2}}$

4. Сравнить числа: а) $3^{1,4}$ или $3^{\sqrt{2}}$ б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$;

5. Упростить выражение:
$$\frac{b^{\frac{4}{3}} \left(b^{-\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)}{b^{\frac{1}{4}} \left(b^{\frac{3}{4}} + b^{-\frac{1}{4}} \right)}$$

Теоретический материал:

Опр. Если n – натуральное число, m – целое число и частное $-\frac{m}{n}$ является целым числом,

то при $a > 0$ справедливо равенство $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Пример

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8$$

Опр.

Для любых рациональных чисел p и q и $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$	7. Возведение в отрицательную степень $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$	5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	
3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	6. Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$	

Примеры:

$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8;$ $7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7 \sqrt[4]{7};$ $27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{3^{-6}} = \sqrt[3]{(3^2)^{-3}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$	$7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 7;$ $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$ $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8$ $24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4 \sqrt[3]{3^2} = 4 \sqrt[3]{9};$ $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}.$
--	--

Упростить выражение $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$. ► $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab. \triangleleft$	Упростить выражение $\frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}}$. Применяя свойства степени с действительным показателем, получаем $\frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}} = \frac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}} = \frac{a^2}{a} = a. \triangleleft$
---	--

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.

В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Практическое занятие по теме:
Решение показательных уравнений.

Цель: Закрепление теоретических знаний при решении показательных уравнений.

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, калькуляторы.

Время выполнения: 2 часа.

Содержание:

Решите уравнение:

40.2. а) $4^x = \frac{1}{16}$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 36$;

 б) $7^x = \frac{1}{343}$; г) $0,2^x = 0,00032$.

40.3. а) $10^x = \sqrt[4]{1000}$; в) $0,3^x = \sqrt[4]{0,0081}$;

 б) $5^x = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25\sqrt{5}$.

○**40.6.** а) $3^{-1-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-7} = 6^{x-3}$;

 б) $6^{2x-8} = 216^x$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{8x+1} = 1,5^{2x-3}$.

○**40.7.** а) $3^{x^2-4,5} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{27}$; в) $\sqrt{2^{-1}} \cdot 2^{x^2-7,5} = \frac{1}{128}$;

 б) $0,5^{x^2-5,5} \cdot \sqrt{0,5} = 32$; г) $0,1^{x^2-0,5} \cdot \sqrt{0,1} = 0,001$.

○**40.14.** а) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 = 0$;

 б) $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$; г) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} + 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 = 0$.

○**40.15.** а) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$;

 б) $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;

○**40.16.** а) $4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x - 17 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + 4 = 0$;

 б) $0,01^x + 9,9 \cdot (0,1)^x - 1 = 0$;

 в) $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 6 = 0$;

 г) $5 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^x + 23 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x - 10 = 0$.

●**40.25.** а) $18^x - 8 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^x = 0$;

 б) $12^x - 6^{x+1} + 8 \cdot 3^x = 0$.

Теоретический материал:

Опр. Показательными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

- 1) Простейшие уравнения, т.е. такие, левую и правую части которых можно привести к одному основанию решаются так:

Пример

$$5^x = 625 \Rightarrow 5^x = 5^4 \Rightarrow x = 4. \quad \text{Ответ: } x = 4$$

- 2) Уравнения вида $2^x + 2^{x-1} - 2^{x-3} = 4$ решаются вынесением за скобки степени с наименьшим показателем.
- 3) Уравнения, вида $7^{2x} - 48 \cdot 7^x = 49$ решаются с помощью подстановки $a^x = y$, сводится к квадратному.

Пример

Решить уравнение: $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$

Решение:

$$5^x = y,$$

$$5y^2 - 26y + 5 = 0,$$

$$D = 169 - 25 = 144,$$

$$y_1 = 5 \quad y_2 = 1/5$$

$$5^x = 5$$

$$x = 1,$$

$$5^x = 1/5$$

$$x = -1$$

Ответ: $x = 1$ и $x = -1$

- 4) При решении уравнения вида $a^x = b^x$ обе части уравнения необходимо разделить на b^x , т.к. $b^x \neq 0$

$$\frac{a^x}{b^x} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Алгоритм решения показательного уравнения:

1. Главное в показательных уравнениях - свести левую и правую часть уравнения к общему основанию.
2. Основания одинаковые, следовательно, приравниваем показатели.
3. Решаем, полученное уравнение.
4. Делаем проверку

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.
В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Практическое занятие по теме:

Решение прикладных задач.

Цель: Закрепление теоретических знаний при решении показательных уравнений, прикладных задач.

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, калькуляторы.

Время выполнения: 1 час.

Содержание:

Решите показательные уравнения:

●40.27. а) $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$;

б) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 10^x - 5 \cdot 5^{2x} = 0$;

в) $3^{2x+1} - 4 \cdot 21^x - 7 \cdot 7^{2x} = 0$;

г) $5 \cdot 3^{2x} + 7 \cdot 15^x - 6 \cdot 25^x = 0$.

Самостоятельная работа:

1 вариант

1. Решить уравнение:

$$0,2^{x^2+4x-5} = 1$$

2. Решить неравенство:

а) $(\sqrt{5})^{x-6} < \frac{1}{5}$; б) $\left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1} \geq 1$.

2 вариант

1. Решить уравнение:

$$\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3} = 1$$

2. Решить неравенство:

а) $(\sqrt[3]{3})^{x+6} > \frac{1}{9}$; б) $\left(1\frac{2}{7}\right)^{x^2-4} \leq 1$.

Теоретический материал:

Алгоритм решения показательного уравнения:

1. Главное в показательных уравнениях - свести левую и правую часть уравнения к общему основанию.
2. Основания одинаковые, следовательно, приравниваем показатели.
3. Решаем, полученное уравнение.
4. Делаем проверку

Решение показательных неравенств сводится к решению простейших неравенств вида

$$a^x > a^b \text{ или } a^x < a^b$$

Если $a > 1$ и $a^x > a^b$, то $x > b$

Если $0 < a < 1$ и $a^x > a^b$, то $x < b$

Пример Решить неравенство: $(\sqrt{5})^{4-x} \geq \frac{1}{125}$

Решение:

$5^{(4-x)/2} \geq 5^{-3}$, $a = 5$, сравним показатели $(4-x)/2 \geq -3$, $4-x \geq -6$, $-x \geq -10$, $x \leq 10$

Ответ: $x \leq 10$

Алгоритм решения показательного неравенства:

1. Главное в показательных неравенствах - свести левую и правую часть к общему основанию.
2. Основания одинаковые, следовательно, переходим к показателям, но
3. оцениваем основание a , если $a > 1$ знак неравенства не меняем при избавлении оснований, если $0 < a < 1$ знак неравенства меняем на противоположный.
4. Решаем, полученное неравенство, методом интервала.

Контрольные вопросы.

1. Какие уравнения (неравенства) называются показательными?
2. Какие основные способы решения показательных уравнений вы знаете?
3. На что необходимо обратить внимание при решении показательных неравенств?

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.

В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Практическое занятие по теме:

Нахождение значений логарифма по произвольному основанию.

Цель: Закрепление теоретических знаний при нахождении значений логарифмов по произвольному основанию.

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, калькуляторы.

Время выполнения: 1 час.

Содержание:



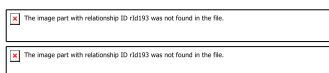
Теоретический материал:

Опр. Логарифмом числа b по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить число b .

Примеры

1. $\log_5 25 = 2$, т.к. $5^2 = 25$

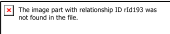
2. $\log_3 3 = 1$, т.к. $3^1 = 3$



Определение логарифма можно записать так $a^{\log_a b} = b$.

Из определения логарифма вытекают две формулы, которые постоянно встречаются в реальных задачах. Эти формулы позволяют заменить знак логарифма нормальными числами:

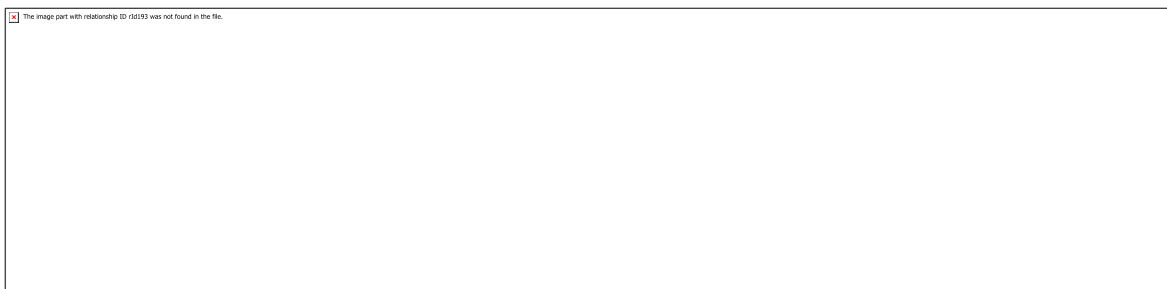
1. $\log_a a^n = n$

2.  эту формулу называют основным логарифмическим тождеством.

Опр. Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $lg b$ вместо $\log_{10} b$ т.е. $\log_{10} b = lg b$

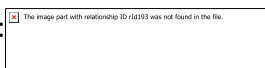
Опр. Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e , где e - иррациональное число, приближённо равное 2,7. При этом пишут $ln b$ вместо $\log_e b$, т.е. $\log_e b = ln b$

Примеры



Кроме того, надо уметь заменять корни и дроби на степени с рациональным показателем, иначе в некоторых выражениях выносить из под знака логарифма будет просто нечего.

Формулы замены:



1. Показательные выражения

Будем называть показательным выражением любую конструкцию вида a^k , где числа a и k — произвольные постоянные, причем $a > 0$.

Ниже приведены основные формулы, которые обязательно надо знать. Применение этих формул на практике, как правило, не вызывает проблем.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
2. $a^n / a^m = a^{n-m}$;
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
5. $(a : b)^n = a^n : b^n$.

Если встретилось сложное выражение со степенями, и не понятно, как к нему подступиться, используют универсальный прием — разложение на простые множители. В результате большие числа в основаниях степеней заменяются простыми и понятными элементами. Затем останется лишь применить указанные выше формулы — и задача будет решена.

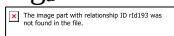
2. Комбинированные задачи

Если знать формулы, то все показательные и логарифмические выражения решаются буквально в одну строчку.

Из определения логарифма вытекают две формулы, которые постоянно встречаются в реальных задачах. Эти формулы позволяют заменить знак логарифма нормальными числами:

3. $\log_a a^n = n$

4.



Общая схема решения комбинированных задач выглядит так:

1. Записать там, где это возможно, числа в виде степеней. Например, $25 = 5^2$, $16 = 2^4$, $27 = 3^3$... дальше сами. Корни и дроби тоже надо заменить степенями по уже известным формулам:



2. Избавиться от степеней в основаниях логарифмов, если они там есть. Затем все множители, стоящие перед знаком логарифма, нужно внести в аргумент.

Например, $5 \cdot \log_7 2 = \log_7 2^5 = \log_7 32$.

3. Воспользоваться формулами замены логарифмов.

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.

В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Практическое занятие по теме:
Переход от одного основания к другому.

Цель: Закрепление теоретических знаний при решении примеров с использованием формул перехода от одного основания к другому.

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, калькуляторы.

Время выполнения: 1 час.

Содержание:

Задание 1: Найдите значение

The image part with relationship ID r5d193 was not found in the file.

выражения

Задание 2: Найдите значение выражения

The image part with relationship ID r5d193 was not found in the file.

Задание 3: Найдите значение выражения

- 1)

The image part with relationship ID r5d193 was not found in the file.

 ; 2)

The image part with relationship ID r5d193 was not found in the file.

 ; 3)

The image part with relationship ID r5d193 was not found in the file.

 ;
- 4)

The image part with relationship ID r5d193 was not found in the file.

Задание 4: Вычислите значение выражения

The image part with relationship ID r5d193 was not found in the file.

The image part with relationship ID r5d193 was not found in the file.

Задание 5: Упростите выражение:

The image part with relationship ID r5d193 was not found in the file.

The image part with relationship ID r5d193 was not found in the file.

Теоретический материал:

Формулы перехода к другому основанию: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

The image part with relationship ID r5d193 was not found in the file.

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.

В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Практическое занятие по теме:

Вычисление и сравнение логарифмов.

Цель: Закрепление теоретических знаний при вычислении и сравнении логарифмов.

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, калькуляторы.

Время выполнения: 1 час.

Содержание:





Самостоятельная работа

1 вариант.

1. Вычислить: а) $9^{2\log_3 5}$; б) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$;

в)
$$\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$$

2. При каких значениях x имеет смысл выражение: $\log_6(49 - x^2)$

2 вариант.

1. Вычислить: а) $3^{5\log_3 2}$; б) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

в)
$$\frac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$$

2. При каких значениях x имеет смысл выражение: $\log_7(x^2 + x - 6)$

Теоретический материал:

При преобразовании и вычислении значений логарифмических выражений применяют свойства логарифмов.

Свойства

$$1. \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$2. \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$3. \log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

$$4. \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \cdot \log_a b$$

1.6. Сравнение выражений, содержащих логарифмы При сравнении двух выражений, содержащих логарифмы, используют следующие правила, вытекающие из свойств функции $y = \log_a x$. • Если $a > 1$ и $M > N > 0$, то $\log_a M > \log_a N$. • Если $0 < a < 1$ и $M > N > 0$, то $\log_a M < \log_a N$. В частности: а) Если $a > 1$ и $M > 1$, то $\log_a M > 0$. б) Если $a > 1$ и $0 < M < 1$, то $\log_a M < 0$. в) Если $0 < a < 1$ и $M > 1$, то $\log_a M < 0$. г) Если $0 < a < 1$ и $0 < M < 1$, то $\log_a M > 0$.	Из свойств функции $y = \log_x a$ следуют такие правила. • Если $a > 1$ и $M > N > 1$, то $\log_M a < \log_N a$. • Если $a > 1$ и $0 < N < M < 1$, то $\log_M a < \log_N a$. • Если $0 < a < 1$ и $N > M > 1$, то $\log_M a < \log_N a$. • Если $0 < a < 1$ и $0 < M < N < 1$, то $\log_M a < \log_N a$.
Пример 16. Сравнить числа: а) $\log_2 5$ и $\log_2 \pi$; б) $\log_{0,5} 20$ и $\log_{0,5} 7$; в) $\log_2 3$ и $\log_4 5$. Решение. а) Так как $5 > \pi$ и основание $2 > 1$, то по свойству логарифмов имеем $\log_2 5 > \log_2 \pi$. б) Основание логарифмов $0 < 0,5 < 1$ и $20 > 7$. Поэтому $\log_{0,5} 20 < \log_{0,5} 7$. в) Так как $\log_4 5 = \log_2 \sqrt{5}$ и $3 > \sqrt{5}$, то по свойству возрастающей функции $y = \log_2 x$ имеем $\log_2 3 > \log_2 \sqrt{5}$ и $\log_2 3 > \log_4 5$.	Пример 19. Сравнить числа: а) $\log_{0,5} 5$ и $\log_2 5$; б) $\log_{0,5} 7$ и $\log_{0,8} 7$; в) $\log_3 0,6$ и $\log_5 0,6$. Решение. а) Так как $\log_{0,5} 5 < 0$, а $\log_2 5 > 0$, то $\log_{0,5} 5 < \log_2 5$. б) Так как $\log_{0,5} 7 = \frac{1}{\log_7 0,5}$ и $\log_{0,8} 7 = \frac{1}{\log_7 0,8}$, а $\log_7 0,5 < \log_7 0,8 < 0$, то $\frac{1}{\log_7 0,5} < \frac{1}{\log_7 0,8}$ и $\log_{0,5} 7 > \log_{0,8} 7$.
Пример 17. Сравнить числа: $\log_2 5$ и $\log_3 7$. Решение. Подберем «хорошее» число такое, которое больше одного логарифма и меньше другого. Так как функция $y = \log_2 x$ возрастающая, то $\log_2 5 > \log_2 4 = 2$. Аналогично, $\log_3 7 < \log_3 9 = 2$. Значит, $\log_2 5 > 2 > \log_3 7$ и $\log_2 5 > \log_3 7$.	Замечание. Так как функция $y = \log_7 x$ на промежутке $(0;1)$ принимает отрицательные значения и является возрастающей, то на этом же промежутке функция $y = \log_x 7 = \frac{1}{\log_7 x}$ является убывающей. Тогда для функции $y = \log_x 7$ на промежутке $(0;1)$ из неравенства $0,5 < 0,8$ следует неравенство $\log_{0,5} 7 > \log_{0,8} 7$.

Ответ: $\log_2 5 > \log_3 7$.

	в) По правилу: так как $0 < 0,6 < 1$ и $5 > 3 > 1$, то $\log_3 0,6 < \log_5 0,6$. Ответ: а) $\log_{0,5} 5 < \log_2 5$; б) $\log_{0,5} 7 > \log_{0,8} 7$; в) $\log_3 0,6 < \log_5 0,6$.
1.7. Сравнение выражений разного вида При сравнении выражений разного вида используют выше приведенные методы. Пример 22. Сравнить числа: $\sqrt{15}$ и $2\log_{12} 145$. Решение. Так как $2\log_{12} 145 > 2\log_{12} 144 = 4$ и $\sqrt{15} < \sqrt{16} = 4$, то $2\log_{12} 145 > \sqrt{15}$. Ответ: $2\log_{12} 145 > \sqrt{15}$.	Пример 23. Сравнить числа: $\log_2 11$ и $2 + \sqrt{3}$. Решение. Так как $\sqrt{3} > \sqrt{2,25} = 1,5$, то $2 + \sqrt{3} > 3,5 = \log_2 (8\sqrt{2}) > \log_2 (8 \cdot 1,4) = \log_2 (11,2) > \log_2 11$. Ответ: $2 + \sqrt{3} > \log_2 11$.

Контрольные вопросы.

1. Понятие логарифма и его основные свойства.
2. Понятие натурального и десятичного логарифмов.
3. Основные свойства степеней и понятие степени.

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.

В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Практическое занятие по теме:
Логарифмирование и потенцирование выражений.

Цель: Закрепление теоретических знаний при логарифмировании и потенцировании выражений.

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, калькуляторы.

Время выполнения: 2 часа.

Содержание:

Задание 1: Найти x по данному логарифму : а) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4} \log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7} \log_{\frac{2}{3}} b$

б) $\log_3 x = 3 \log_3 a - 2 \log_3 b + \log_3 (a + b)$





Задание 1 : Найти x по данному логарифму :

а) $\lg x = 2 \lg 2 + \lg(a + b) + \lg(a - b)$;

б) $\log_{\sqrt{15}} x = 4 \log_{\sqrt{15}} 2 - \log_{\sqrt{15}} 6 + \log_{\sqrt{15}} 15$

в) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{2}} b$

г) $\lg x = \lg \frac{7}{9} + \lg 21 - 2 \lg 7$

Задание 2:

а) Прологарифмировать выражение по основанию 2: $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$

б) Прологарифмировать выражение по основанию 3: $x = \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$

Теоретический материал:

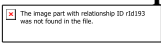
Опр. Логарифмом числа b по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить число b .

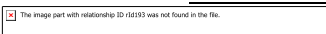
Примеры

1. $\log_5 25 = 2$, т.к. $5^2 = 25$

2. $\log_3 3 = 1$, т.к. $3^1 = 3$

Свойства логарифмов:

1°  - основное логарифмическое тождество.

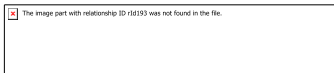
2° 

3° 

Логарифм единицы по любому положительному, отличному от 1, основанию равен нулю. Это возможно потому, что из любого действительного числа можно получить 1 только возведя его в нулевую степень.

4°  - логарифм произведения.

Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.



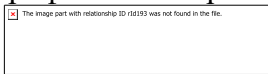
5° - логарифм частного.

Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов сомножителей.

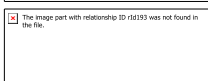


6° - логарифм степени.

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания.



7°



8°

Логарифмирование – это нахождение логарифмов заданных чисел или выражений.

Пример: Найдем логарифм $x = a^2 \cdot \frac{b}{c}$

Решение.

Последовательно воспользуемся сразу всеми тремя основными свойствами логарифмов, которые изложены выше (логарифм произведения, логарифм частного и логарифм степени):

$$\lg x = \lg \left(a^2 \cdot \frac{b}{c} \right) = \lg a^2 + \lg b - \lg c = 2\lg a + \lg b - \lg c$$

Логарифмирование – это преобразование, при котором логарифм выражения с переменными приводится к сумме или разности логарифмов переменных.

Необходимо четко различать сумму логарифмов $\lg a + \lg b$ и логарифм суммы $\lg(a+b)$. Сумма логарифмов равна логарифму произведения, а для логарифма суммы формулы нет.

Пример. Дано $x = \frac{3a^2\sqrt[5]{b^3}}{c^4(a+b)}$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$. Найти $\lg x$.

Решение. Логарифмируя, получим:

$$\lg x = \lg 3 + \lg a^2 + \lg \sqrt[5]{b^3} - \lg c^4 - \lg(a+b) = \lg 3 + 2\lg a + \frac{3}{5}\lg b - 4\lg c - \lg(a+b)$$

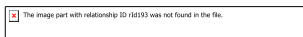
Потенцирование – это преобразование, обратное логарифмированию.

Потенцировать – значит освобождаться от знаков логарифмов в процессе решения логарифмического выражения.

При решении уравнений потенцированием выражения преобразовывают с помощью свойств логарифмов, приводя их к виду



либо к виду



Например, надо решить уравнение $\log_2 3x = \log_2 9$.

Убираем знаки логарифмов – то есть потенцируем:

$$3x = 9.$$

В результате получаем простое уравнение, которое решается за несколько секунд:

$$x = 9 : 3 = 3.$$

Но потенцирование не сводится к простому и произвольному убиранию значков логарифмов. Для этого в обеих частях уравнения как минимум должно быть одинаковое значение основания (в нашем случае это основание 2).

Потенцирование применяется при решении логарифмических уравнений.

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.

В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Практическое занятие по теме:

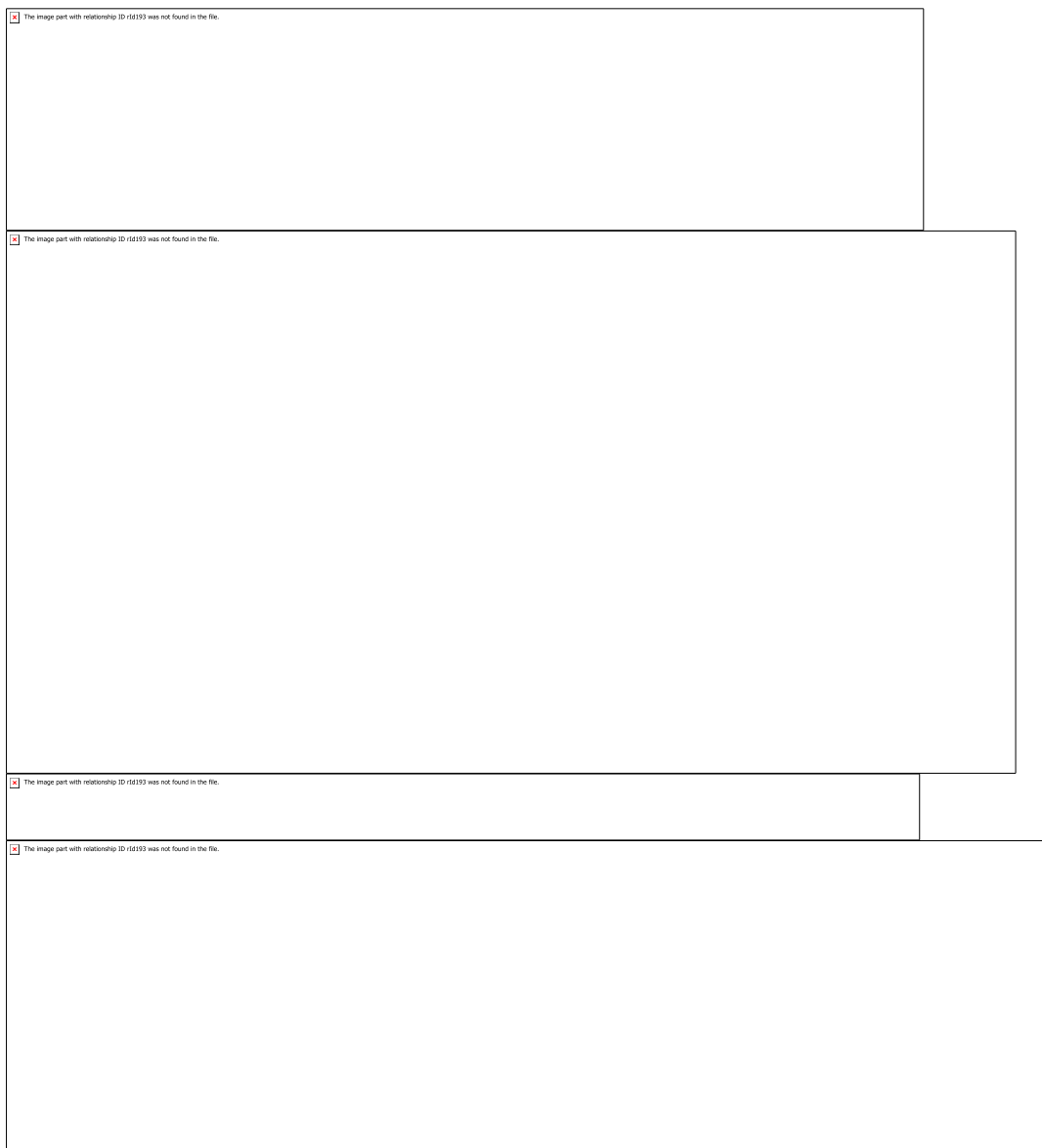
Решение логарифмических уравнений

Цель: Закрепление теоретических знаний при решении логарифмических уравнений.

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, калькуляторы.

Время выполнения: 3 часа.

Содержание:



Теоретический материал:

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма, называются логарифмическими. При решении логарифмических уравнений применяется потенцирование: если логарифмы чисел равны, то равны и соответствующие им числа. Во всех случаях полученные решения необходимо проверить подстановкой их в данное уравнение и исключить посторонний корень.

Например, надо решить простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_2 3x = \log_2 9.$$

Убираем знаки логарифмов – то есть потенцируем:

$$3x = 9.$$

В результате получаем простое уравнение, которое решается за несколько секунд:

$$x = 9 : 3 = 3.$$

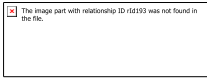
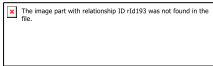
Но потенцирование не сводится к простому и произвольному убиению значков логарифмов. Для этого в обеих частях уравнения как минимум должно быть одинаковое значение основания (в нашем случае это основание 2).

Для приведения логарифмических уравнений к виду простейших ниже приведены основные формулы, которые надо знать, чтобы справиться с логарифмами:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a (x : y)$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

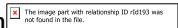


Кроме того, надо уметь заменять корни и дроби на степени с рациональным показателем, иначе в некоторых выражениях выносить из под знака логарифма будет просто нечего. Формулы замены:



Из определения логарифма вытекают две формулы, которые постоянно встречаются в реальных задачах. Эти формулы позволяют заменить знак логарифма нормальными числами:

$$\log_a a^n = n$$



Пример Решить уравнение $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$

Решение

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3 \quad 3 = \log_2 8$$

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = \log_2 8$$

$$(x+1) \cdot (x+3) = 8$$

$$x^2 + 4x + 3 = 8$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -5$$

Проверка

$$x = 1 \quad \log_2(1+1) + \log_2(1+3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3 \quad - \text{ левая часть}$$

$$3 = 3 \Rightarrow x = 1 - \text{ корень уравнения}$$

$$x = -5 \quad \log_2(-5+1) + \log_2(-5+3) = \log_2(-4) + \log_2(-2) \quad - \text{ левая часть не имеет смысла} \Rightarrow$$

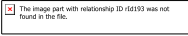
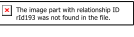
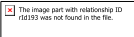
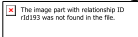
$$x = -5 \text{ не является корнем}$$

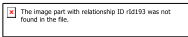
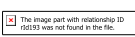
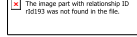
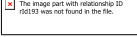
Ответ: $x = 1$

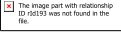




Логарифмические неравенства:

1. Неравенство  в случае, если  сводится к равносильному неравенству . Если же  - то к неравенству .

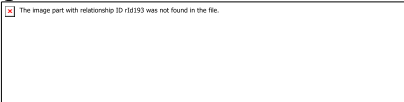
Аналогично неравенство  равносильно неравенствам для  :  ; для  : .

Решения полученных неравенств надо пересечь с ОДЗ: 

2. Решение логарифмического неравенства вида  равносильно решению следующих систем:

- а)  б) 

Неравенство  в каждом из двух случаев сводится к одной из систем:

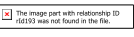
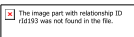
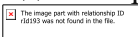
- а)  б) 

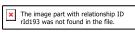
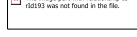
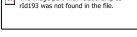
Контрольные вопросы

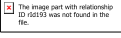
1. Понятие логарифмического уравнения.

2. Понятие потенцирования.

3. ОДЗ? **Логарифмические неравенства:**

1. Неравенство  в случае, если  сводится к равносильному неравенству . Если же  - то к неравенству .

Аналогично неравенство  равносильно неравенствам для  :  ; для  : .

Решения полученных неравенств надо пересечь с ОДЗ: 

2. Решение логарифмического неравенства вида  равносильно решению следующих систем:

a)

б)

Неравенство в каждом из двух случаев сводится к одной из систем:

a)

б)

Контрольные вопросы

1. Понятие логарифмического уравнения.
2. Понятие потенцирования.
3. ОДЗ?

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.

В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Практическое занятие по теме:

Приближенные вычисления и решения прикладных задач.

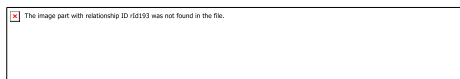
Цель: Закрепление теоретических знаний при выполнении приближенных вычислений и решении прикладных задач. Закрепить и проверить умения находить значения десятичных и натуральных логарифмов по таблице Брадиса и с помощью микрокалькулятора МК-51.

Оборудование: Тетради для практических работ, раздаточный материал, таблица Брадиса, калькуляторы.

Время выполнения: 1 час.

Содержание:

Задание 1. Вычислить с помощью таблицы Брадиса или микрокалькулятора:



Задание 2. Выразить данный логарифм через десятичный и вычислить на микрокалькуляторе или с помощью таблицы Брадиса с точностью до 0,01:



Задание 3. Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе или с помощью таблицы Брадиса с точностью до 0,01:



Задание 4. Число жителей города-новостройки увеличивается ежегодно на 8%. Через сколько лет число жителей удвоится?

Теоретический материал:

Для приближенного вычисления необходимо знать формулу перехода к другому

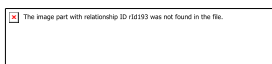
основанию: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, частный случай этой формулы: $\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$ или $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

и уметь пользоваться таблицей Брадиса, для вычисления десятичных и натуральных логарифмов.

Примеры выполнения заданий:

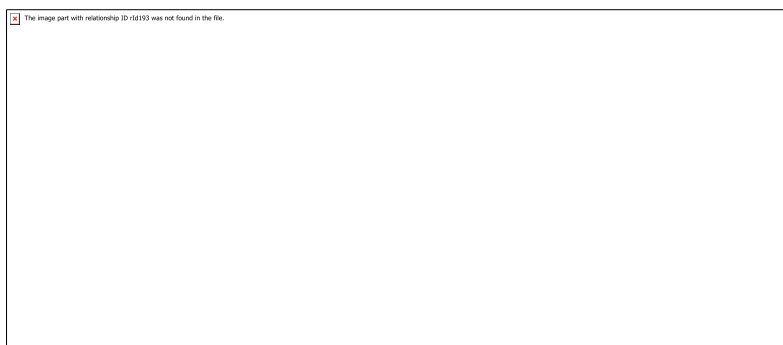


Ответ:



Задача 2.





Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.

В ходе работы должны быть выполнены предложенные задания.

Список используемой литературы:

Основные источники:

1. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М., 2017
2. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Сборник задач профильной направленности: учеб. пособие для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М., 2017
3. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Задачник: учеб. пособие для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М., 2017

Дополнительные источники

1. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Электронный учеб.- метод. комплекс для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М., 2017
2. Гусев В.А., Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М., 2017
3. Математика: алгебра и начала анализа, геометрия: учебное пособие для студентов учреждений проф. Образования / М.И. Башмаков. – М.: Издательский центр «Академия», 2017.
4. Математика. Задачник: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – М.: Издательский центр «Академия», 2017.
5. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин] – М.: Просвещение, 2017.
6. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни // [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин] – М.: Просвещение, 2017.
7. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни/[Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.] – М. : Просвещение, 2017.

Интернет-ресурсы

1. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
2. www.school-collection.edu.ru (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).